A Combinatorial Proof for the Aftermath of a Party

Melanie Tian

tandfonline.com/doi/full/10.1080/07468342.2021.1909979

Tulane University, February 2023, MATH FOR ALL

Definition

aftermath

/'æftəı,mæ θ /

- the consequences of an event, especially a catastrophic event.
- (analogous to afterparty) the math that happens after a party.

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ■ ●の00

Consider a party sufficiently intense such that at one moment everyone suddenly leaves grabbing a random Tulane ID card

- Consider a party sufficiently intense such that at one moment everyone suddenly leaves grabbing a random Tulane ID card
- "This card is for University identification and must be carried by the named individual at all times." (existence)

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Consider a party sufficiently intense such that at one moment everyone suddenly leaves grabbing a random Tulane ID card

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Given that there is no fake ID (uniqueness)

Consider a party sufficiently intense such that at one moment everyone suddenly leaves grabbing a random Tulane ID card

- Given that there is no fake ID (uniqueness)
- What is the expected number of people who grab their own ID?

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Problem: What is the average number of fixed points in a random permutation of *n* objects?

Problem: What is the average number of fixed points in a random permutation of *n* objects?

▲□▶ ▲□▶ ▲ 三▶ ▲ 三▶ 三三 - のへぐ

Answer: 1

- Problem: What is the average number of fixed points in a random permutation of n objects?
- Answer: 1
- ► Proof:

$$E[x] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

- Problem: What is the average number of fixed points in a random permutation of n objects?
- Answer: 1
- Proof:

$$E[x] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

▲□▶ ▲圖▶ ▲匡▶ ▲匡▶ ― 匡 … のへで

This talk:
 We got a longer proof!

Like, just, why?

"The true significance of a result in combinatorics is very often not the result itself, but something less explicit that one learns from the proof." -Timothy Gowers

▲□▶▲□▶▲≡▶▲≡▶ ≡ めぬぐ

Like, just, why?

"The true significance of a result in combinatorics is very often not the result itself, but something less explicit that one learns from the proof." -Timothy Gowers

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ■ ●の00

Read like a writer

To actually count this

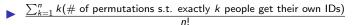


 $\sum_{k=1}^{n} k(\# \text{ of permutations s.t. exactly } k \text{ people get their own IDs})$

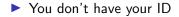
◆□▶ ◆□▶ ◆ 臣▶ ◆ 臣▶ ○ 臣 ○ の Q @

n!

To actually count this



That # is $\binom{n}{k}$ (# s.t. for the rest n - k people no one gets their own ID)





- You don't have your ID
- Someone took yours

- You don't have your ID
- Someone took yours
- What do they have?

- You don't have your ID
- Someone took yours
- What do they have?
- They either have yours or not

- You don't have your ID
- Someone took yours
- What do they have?
- They either have yours or not

•
$$f(n) = (f(n-1) + f(n-2))(n-1)$$
, here we go

for 7 sure brute force but what about for n

we want

 $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} f(n-k)$

▲□▶ ▲□▶ ▲ 三▶ ▲ 三▶ 三三 - のへぐ

to be n!

for 7 sure brute force but what about for n

we want $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} f(n-k)$ to be n!
We know this

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(n-k)$$

▲□▶ ▲□▶ ▲ 三▶ ▲ 三▶ 三三 - のへぐ

is *n*!

Observe:

$$f(n) = \sum_{k=2}^{m} (k-1) \binom{n}{k} f(n-k) + \binom{n-1}{m} f(n-m) + (n-m)\binom{n-1}{m-1} f(n-m-1)$$

◆□▶ ◆□▶ ◆ 臣▶ ◆ 臣▶ ○ 臣 ○ の Q @

Observe:

$$f(n) = \sum_{k=2}^{m} (k-1) {\binom{n}{k}} f(n-k) + {\binom{n-1}{m}} f(n-m) + (n-m) {\binom{n-1}{m-1}} f(n-m-1)$$

In short, we are "stretching it out, do some ransom stuff, and try to fold everything in again".

Observe:

$$f(n) = \sum_{k=2}^{m} (k-1) {n \choose k} f(n-k) + {n-1 \choose m} f(n-m) + (n-m) {n-1 \choose m-1} f(n-m-1)$$

- In short, we are "stretching it out, do some ransom stuff, and try to fold everything in again".
- The details are messing with combinatorial identities that no one wants to see.

▶
$$f(7) = 6f(6) + 6f(5)$$

◆□▶ ◆□▶ ◆ 臣▶ ◆ 臣▶ ○ 臣 ○ の Q @

►
$$f(7) = 6f(6) + 6f(5)$$

$$= 30f(5) + 30f(4) + 6f(5)$$

(ロ)、(型)、(E)、(E)、 E) の(()

◆□▶ ◆□▶ ◆ 臣▶ ◆ 臣▶ ○ 臣 ○ の Q @

$$\blacktriangleright$$
 = 36 $f(5)$ + 30 $f(4)$

•
$$f(7) = 6f(6) + 6f(5)$$

$$= 30f(5) + 30f(4) + 6f(5)$$

$$= 36f(5) + 30f(4)$$

$$= 21f(5) + 15f(5) + 30f(4)$$

▲□▶ ▲□▶ ▲ 三▶ ▲ 三▶ 三三 - のへぐ

► Hey! 21 and 15

•
$$f(7) = 6f(6) + 6f(5)$$

$$= 30f(5) + 30f(4) + 6f(5)$$

$$= 36f(5) + 30f(4)$$

$$= 21f(5) + 15f(5) + 30f(4)$$

- Hey! 21 and 15
- (we got to split into stuff from Pascal's triangle)

◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ □臣 ○のへ⊙

"I feel like mathematics sits halfway between science and art."
 -Lauren Williams

(ロ)、(型)、(E)、(E)、 E) の(()

"I feel like mathematics sits halfway between science and art."
 -Lauren Williams

